**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Функциональный анализ

Functional Analysis

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 002316

Санкт-Петербург

2020

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение понятиям, результатам и методам функционального анализа.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен иметь подготовку в объеме первых двух курсов специальности по математическому анализу, линейной алгебре и топологии.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Профессиональные знания и умения применения методов функционального анализа при решении задач смежных математических дисциплин и в различных прикладных областях науки и техники.

Дисциплина способствует развитию следующих компетенций:

ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;

ПКА-1 – способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Активные занятия в объёме 6 часов: лекции, предполагающие дискуссию с преподавателем.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 5 | 64 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 39 |  | 37 |  | 6 | 4 |
|  | 2-100 |  | 2-100 |  |  |  |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 64 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 39 |  | 37 |  |  | 4 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 5 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Модуль 1. Метрические и нормированные пространства.**

Линейные операторы. Ряды в нормированных пространствах. Теорема о пополнении. Теорема Бэра о категориях. Конечномерные пространства, теорема Рисса о характеристике конечномерных пространств. Предкомпактность, теорема Хаусдорфа. Теорема Арцела – Асколи. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.

Гильбертовы пространства. Наилучшее приближение. Теорема о проекции. Ортогональное дополнение. Существование базиса. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.

**Модуль 2. Линейные функционалы в нормированных пространствах.**

Заряды. Вариация заряда. Теорема Радона – Никодима. Разложения Хана и Жордана. Интеграл по заряду. Интегральные функционалы. Общий вид функционала в пространствах Лебега. Теорема Рисса – Маркова об общем виде функционала в пространствах непрерывных функций. Принцип равномерной ограниченности. Принципы фиксации и сгущения особенностей. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения. Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха о непрерывности обратного оператора.

**Модуль 3. Сопряженное пространство.**

Теорема Хана – Банаха. Линейные функционалы и гиперплоскости. Теорема о достаточном числе функционалов и формулы двойственности Никольского. Второе сопряженное пространство, рефлексивность. Слабая и \*-слабая топология. Слабый принцип выбора в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор. Формулы двойственности для ядра и образа. Теорема Хаусдорфа о нормальной разрешимости. Биективность оператора и его сопряжённого, следствия для разрешимости уравнений.

**Модуль 4. Линейные операторы в банаховых пространствах.**

Интегральные операторы, операторы Фредгольма и Вольтерра и их нормы. Условия непрерывности интегрального оператора. Оператор Гильберта – Шмидта. Тест Шура и его применения. Свертка. Спектральный радиус. Теорема Банаха о биективности оператора, близкого к тождественному. Резольвента, спектр, собственные числа: свойства, примеры. Собственные числа. Теорема о спектральном радиусе. Теорема об отображении спектров для многочленов. Свойства и примеры компактных операторов. Операторы конечного ранга. Теорема Шаудера. Условия разрешимости уравнения второго рода. Альтернатива Фредгольма. Индекс оператора. Фредгольмовы операторы. Теорема Никольского о характеристике фредгольмовых операторов. Спектр компактного оператора.

**Модуль 5. Линейные операторы в гильбертовых пространствах.**

Эрмитовски сопряженный оператор. Условия биективности и формулы двойственности для ядра и образа. Билинейная и квадратичная форма оператора. Построение оператора по билинейной форме. Нормальные, самосопряженные и унитарные операторы, свойства, спектры. Ортогональные проекторы.

Нормальные компактные операторы. Теорема Гильберта - Шмидта. Спектральная теорема для нормального компактного оператора. Представление Шмидта компактного оператора. Функции оператора. Проекторные меры. Спектральная теорема для самосопряженного и нормального оператора. Функции класса Шварца. Преобразование Фурье. Теорема Планшереля. Функции Эрмита.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Методические материалы включают в себя следующие типы материалов — учебники, учебные пособия, методические указания для обучающихся, Интернет-ресурсы, электронные учебные пособия, с опорой на которые проводится аудиторная работа.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Задачники и пособия из списка рекомендованной литературы

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

*Методика проведения экзамена.*

Экзамен проводится в устной форме. Билет содержит 2 вопроса из списка вопросов к экзамену. На подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

После ответа на основные вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен. В качестве дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения, основные формулы, формулировки основных теорем. Так же в качестве дополнительного вопроса может быть предложена задача по темам, изученным в соответствующем семестре.

*Критерии выставления оценок за ответ на экзамене.*

Оценка «отлично» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;

2. обучающийся отвечает на все дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся дан полный ответ на один из вопросов билета, по второму вопросу написаны все определения и основные формулировки;

2. обучающийся отвечает более чем на 3/4 дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются оба условия:

1. по обоим вопросам написаны все основные определения и формулировки, а по одному из вопросов приведены основные шаги доказательства;

2. обучающийся дает правильный ответ более чем на половину заданных дополнительных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

*Критерии оценки на экзамене в системе ECTS*

Оценка «A» ставится в тех же случаях, что и оценка «отлично».

Оценка «B» ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено не более двух неточностей.

Оценка «C» ставится, если выполнены требования для оценки «хорошо» и при этом в ответе допущено более двух неточностей.

Оценка «D» ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено не более одной грубой ошибки.

Оценка «E» ставится, если выполнены требования для оценки «удовлетворительно» и при этом в ответе допущено более одной грубой ошибки.

Оценка «F» ставится в тех же случаях, что и оценка «неудовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список вопросов к экзамену:

1. Простейшие свойства линейных операторов. Критерии непрерывности и непрерывной обратимости линейного оператора.

2. Простейшие свойства сходимости в себе и полных пространств. Теоремы о полноте подпространства и об абсолютной сходимости рядов.

3. Полнота пространства ограниченных функций, пространства операторов, сопряжённого пространства.

4. Теорема о продолжении с плотного множества, следствия.

5. Теорема о пополнении.

6. Лемма о вложенных шарах и теорема Бэра о категориях.

7. Теорема об изоморфизме конечномерных пространств.

8. Следствия теоремы об изоморфизме конечномерных пространств.

9. Лемма о почти перпендикуляре.

10. Теорема Ф.Рисса о характеристике конечномерных пространств.

11. Теорема Хаусдорфа о предкомпактных множествах и её уточнение.

12. Теорема Арцела - Асколи. Примеры.

13. Леммы к теореме Стоуна - Вейерштрасса.

14. Теорема Стоуна - Вейерштрасса в вещественном случае.

15. Теорема Стоуна - Вейерштрасса в комплексном случае.

16. Примеры применения теоремы Стоуна - Вейерштрасса.

17. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

18. Теорема о проекции. Ортогональное дополнение.

19. Теорема о существовании базиса в гильбертовом пространстве и её следствия.

20. Теорема Ф.Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.

21. Теорема о вариации заряда и следствия о представлении заряда в виде линейной комбинации мер.

22. Вариация заряда как полунорма. Вычисление вариации заряда по его плотности.

23. Теорема Радона - Никодима для конечных мер.

24. Теорема Радона - Никодима в общем случае.

25. Разложения Хана и Жордана.

26. Свойства интеграла по заряду.

27. Теорема об интегральных функционалах в пространствах Лебега.

28. Теорема об общем виде функционала в пространствах Лебега (случай конечной меры).

29. Теорема об общем виде функционала в пространствах Лебега (общий случай).

30. Теорема об интегральных функционалах в пространствах непрерывных функций.

31. Теорема Рисса - Маркова об общем виде функционала в пространствах непрерывных функций (формулировка и обсуждение).

32. Принцип равномерной ограниченности. Принципы фиксации и сгущения особенностей.

33. Теорема Банаха - Штейнгауза.

34. Сходимость квадратурных формул. Теорема Сегё.

35. Обобщённый предел. Теорема Тёплица.

36. Расходимость рядов Фурье в точке.

37. Вычисление нормы оператора свёртки в $L$ и расходимость рядов Фурье в $L$.

38. Тождество Бермана – Марцинкевича - Зигмунда и теорема Лозинского - Харшиладзе.

39. Теорема об открытом отображении.

40. Теорема Банаха о непрерывности обратного оператора и следствие об эквивалентности норм.

41. Теорема Хана - Банаха в вещественном случае.

42. Теорема Хана - Банаха в комплексном случае и для нормированных пространств.

43. Линейные функционалы и гиперплоскости. Геометрический смысл нормы функционала.

44. Усиленная теорема о достаточном числе функционалов и её следствия.

45. Формулы двойственности Никольского.

46. Критерий минимальности и равномерной минимальности последовательности (с леммой).

47. Второе сопряжённое пространство, рефлексивность.

48. Простейшие свойства слабой сходимости.

49. Описание слабой сходимости в гильбертовом пространстве и в пространстве непрерывных функций.

50. Слабая и $\*$-слабая топология: задание с помощью семейства полунорм, условия $\*$-слабой сходимости и ограниченности, примеры, замкнутость и слабая замкнутость, теорема Банаха - Алаоглу (формулировки).

51. Слабый принцип выбора в гильбертовом пространстве (с леммой).

52. Определение и простейшие свойства сопряжённого оператора.

53. Примеры операторов и их сопряжённых.

54. Формулы двойственности для ядра и образа. Теорема Хаусдорфа о нормальной разрешимости.

55. Биективность оператора и его сопряжённого (с леммой). Следствия о разрешимости уравнений.

56. Операторы Фредгольма и Вольтерра и их нормы.

57. Гёльдеровские условия непрерывности интегрального оператора. Оператор Гильберта -Шмидта.

58. Тест Шура.

59. Применения теста Шура.

60. Неравенство Гильберта (теорема Гильберта о двойных рядах).

61. Теорема о существовании и свойствах свёртки.

62. Спектральный радиус. Теорема Банаха о биективности оператора, близкого к тождественному.

63. Свойства множества биективных операторов.

64. Свойства резольвенты.

65. Свойства спектра.

66. Теорема о спектральном радиусе.

67. Теорема об отображении спектров для многочленов.

68. Примеры спектров операторов в пространствах последовательностей.

69. Спектр оператора умножения, оценки спектрального радиуса интегральных операторов, спектральный радиус оператора Вольтерра.

70. Определение и простейшие свойства компактных операторов.

71. Действия с компактными операторами.

72. Операторы конечного ранга и компактные операторы. Интегральные операторы с вырожденными ядрами.

73. Компактность операторов Фредгольма и Вольтерра.

74. Компактность оператора Гильберта - Шмидта.

75. Базис в пространстве непрерывных функций.

76. Компактные операторы и слабая сходимость.

77. Теорема Шаудера.

78. Лемма об ограниченном прообразе и теорема о нормальной разрешимости уравнения второго рода.

79. Условия однозначной разрешимости уравнения второго рода.

80. Лемма о биортогональных системах и теорема об индексе оператора вида тождественный минус компактный.

81. Альтернатива Фредгольма.

82. Теорема Никольского о характеристике фредгольмовых операторов (с частичным доказательством).

83. Теорема о спектре компактного оператора (с леммой).

84. Определение и простейшие свойства эрмитовски сопряжённого оператора, примеры.

85. Условия биективности и формулы двойственности для ядра и образа оператора и эрмитовски сопряжённого.

86. Лемма об операторе и его билинейной и квадратичной формах. Построение оператора по билинейной форме.

87. Свойства нормального оператора. Условие биективности нормального оператора.

88. Теорема о спектре нормального оператора, следствия.

89. Свойства самосопряжённого оператора.

90. Границы самосопряжённого оператора. Теорема о спектре самосопряжённого оператора, следствия.

91. Характеристика ортогональных проекторов.

92. Унитарные операторы.

93. Теорема Гильберта - Шмидта.

94. Общий вид нормального компактного оператора, следствия.

95. Спектральная теорема для нормального компактного оператора, следствия.

96. Представление Шмидта компактного оператора.

97. Определение и свойства непрерывных функций самосопряжённого оператора (алгебраические свойства и норма).

98. Свойства непрерывных функций самосопряжённого оператора, связанные со спектром. Квадратный корень из оператора.

99. Декартово и полярное представление нормального оператора.

100. Спектральные заряды. Построение борелевских функций самосопряжённого оператора (с проверкой мультипликативности).

101. Свойства борелевских функций самосопряжённого оператора.

102. Спектральные проекторы и свойства проекторных мер.

103. Интегрирование по проекторной мере.

104. Построение борелевских функций нормального оператора.

105. Свойства борелевских функций нормального оператора.

106. Теорема о носителе проекторной меры и её следствия.

107. Спектральная теорема для нормального и для самосопряжённого оператора.

108. Свойства функций класса Шварца.

109. Лемма об аппроксимации по двум нормам и теорема Планшереля.

110. Следствия теоремы Планшереля.

111. Спектральное разложение преобразования Фурье.

112. Функции Эрмита.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента. Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные и семинарские аудитории.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не предусмотрено.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусмотрено.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусмотрено.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Не предусмотрено.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1975.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.

4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1988.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979.

2. Рудин У. Функциональный анализ. М.,1975.

3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., 1965.

4. Рид М., Саймон Б. Современные методы математической физики. Т. I. М., 1977.

5. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Новосибирск, 2001.

6. Кадец В.М. Курс функционального анализа. Харьков, 2004.

7. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Киев, 1990.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Ресурсы сети Интернет.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Коротяев Евгений Леонидович, д.ф-м.н., профессор, e.korotyaev@spbu.ru, 4284211;

Виденский Илья Викторович, к.ф-м.н., доцент, [i.vidensky@spbu.ru](mailto:i.vidensky@spbu.ru), 4284211.